Optimum condities voor een discontinu investeringsprobleem

Boot, A.W.A.

Publication date:
1984

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Citation for published version (APA):
Boot, A. W. A. (1984). *Optimum condities voor een discontinu investeringsprobleem*. (pp. 1-29). (Ter Discussie FEW). Faculteit der Economische Wetenschappen.

FEW

subfaculteit der econometrie

REEKS "TER DISCUSSIE"

[redacted]

Katholieke
Hogeschool
Tilburg

KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG

REEKS TER DISCUSSIE

No. 84.28

Optimum condities voor een discontinu investeringsprobleem

Drs. A.W.A. Boot

Tilburg, september 1984

FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN

Inhoudsopgave

Inleiding[1)]

In deze bijdrage staat centraal het sprongsgewijze investeringsproces met name binnen optimal-control-modellen. Binnen de huidige formuleringen van optimal-control-modellen wordt aangenomen dat het investeren een continu proces in de tijd is. In werkelijkheid zal het investeringsproces bestaan uit een verzameling afzonderlijke tijdstippen waarop een sprong in de kapitaalgoederenvoorraad plaatsvindt. Deze bijdrage valt uiteen in twee delen. Enerzijds zal ingegaan worden op de economische interpretatie van dit sprongsgewijze investeringsproces en anderzijds zal het sprongsgewijze investeringsproces worden gegoten in een optimal-control-formulering.
Uitgegaan wordt van een homogeen produktieproces met slechts één produktiefactor, nl. kapitaal. Ten aanzien van dit produktieproces wordt verondersteld dat er sprake is van afnemende meer-opbrengsten. Verder wordt aangenomen dat de produktiviteit van kapitaal onder invloed van slijtage continu afneemt. Van tijd tot tijd zal echter de produktiefactor kapitaal d.m.v. investeringen weer op peil worden gebracht. Het lijkt niet reëel te veronderstellen dat de kapitaalgoederenvoorraad permanent door oneindig kleine investeringen op niveau zal worden gehouden. De meest voor de hand liggende reden hiervoor is het bestaan van 'economies of scale': een éénmalige grote investering is per eenheid investering 'goedkoper' dan een (oneindige) reeks kleine investeringen. Onder de vooronderstelling van economies of scale is het investeringsproces derhalve geen continu proces meer maar een discreet proces.

In de eerste paragraaf zal uitgebreid worden ingegaan op de afweging die bestaat tussen economies of scale en afnemende meer-opbrengsten. Dit zal geïllustreerd worden aan de hand van vereenvoudigde modellen die eenvoudig d.m.v. (partiële) afgeleiden zijn op te lossen. Met name zal hier verwezen worden naar het klassieke artikel van Manne: 'Capacity expansion and probabilistic growth' [1].
In de tweede paragraaf staat de optimal-control-formulering van het investeringsmodel centraal. Uitgebreid zal ingegaan worden op de discontinuïteit in de toestandsvariabele die dan ontstaat, maar niet is toegestaan bij toepassing van de standaard-optimal-control-technieken. Voor de oplossing van dit pro-

1) Gaarne dank ik G.J. van Schijndel en T. Geerts van TH-Eindhoven voor de assistentie bij het tot stand komen van paragraaf 2.4.

bleem worden twee benaderingen beschreven. Enerzijds wordt ingegaan op een idee van Vind [7], en anderzijds wordt de aanpak van de Noorse wiskundigen Seierstad en Sydsaeter [8] beschreven die specifieke optimumcondities hebben geformuleerd voor de discontinue tijdstippen en het probleem i.t.t. Vind rechtstreeks oplossen.

1. Economies of scale en afnemende meer-opbrengsten

1.1. Inleiding

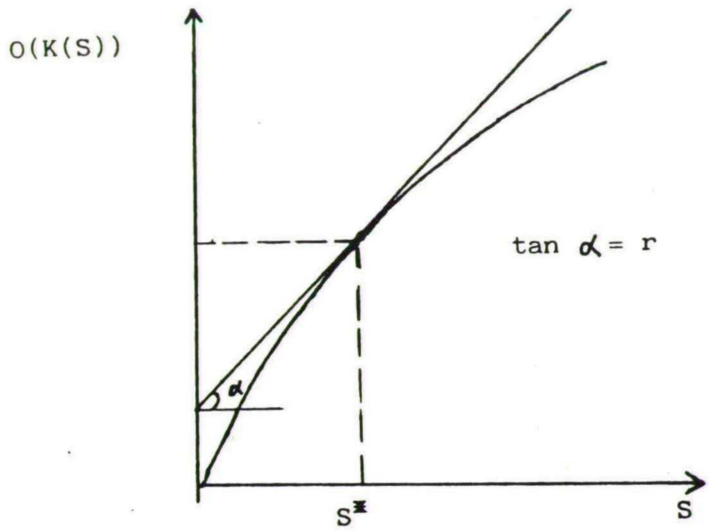
Onder de meest stringente micro-economische vooronderstellingen en uitgaande van het bestaan van afnemende meer-opbrengsten op kapitaal wordt de optimale kapitaalgoederenvoorraad, K_0^*, voor een naar winstmaximalisatie strevende producent gevonden in het punt waar geldt dat het marginaal rendement op kapitaal gelijk is aan de tijdsvoorkeurvoet. Dit bekende resultaat uit de micro-economische theorie geldt alleen bij de afwezigheid van economies of scale. Rekeninghoudend met economies of scale geldt in het optimum de gelijkheid tussen het marginaal rendement op de investeringsuitgaven en de tijdsvoorkeurvoet. Noodzakelijk voor het bestaan van een optimum is dat ten alle tijde de afnemende meer-opbrengsten het economies of scale effect overheersen.
De bovenstaande veronderstellingen en voorwaarden kunnen als volgt worden samengevat:

$$\frac{dO}{dK} > 0; \; \frac{dK}{dS} > 0; \; \frac{d^2O}{dK^2} < 0; \; \frac{d^2K}{dS^2} > 0; \; -\frac{d^2O}{dK^2} > \frac{d^2K}{dS^2}\left[\frac{dO/dK}{(dK/dS)^2}\right] \qquad (1.1)$$

waarin:

O(K) = de opbrengstenfunctie;
K = de produktiefactor kapitaal = de kapitaalgoederenvoorraad;
S = de investeringsuitgaven

Het hierboven gedefinieerde optimum zal uitgaande van de continue slijtage van de kapitaalgoederenvoorraad slechts op bepaalde tijdsmomenten actueel zijn. De kapitaalgoederenvoorraad zal zich sprongsgewijs rond dit optimum begeven. Dit wordt in paragraaf 2 nog bewezen.
Het optimum is grafisch weergegeven in figuur 1.



waarin: r = de tijdsvoorkeurvoet.

Figuur 1. Het optimale investeringsniveau

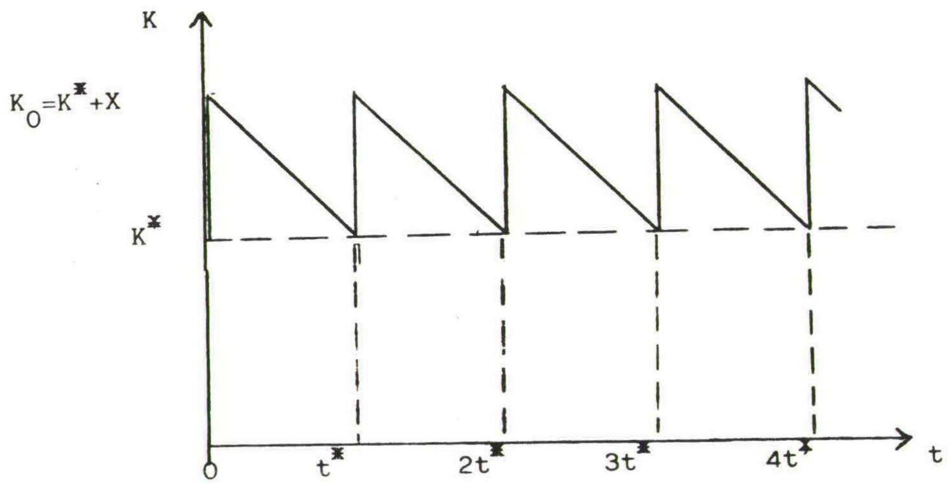
In het voorgaande is bepaald wat de optimale beslissing is van een onderneming die een investeringsproject wil beginnen zonder dat deze rekening houdt met de vervolgbeslissingen die nodig zijn om het project in stand te houden. Wij zullen ons gaan concentreren op de vervolgbeslissingen. Namelijk, de uit hoofde van de slijtage noodzakelijke bepaling van de grootte van de vervangingsinvesteringen en de bepaling van de investeringstijdstippen.[1)]
Ten aanzien van deze (vervangings)investeringen wordt eveneens verondersteld dat het 'economies of scale' effect wordt overheerst door de afnemende meeropbrengsten, zodat dus wederom is voldaan aan (1.1).
In de komende subparagraaf zal aan de hand van het artikel van Manne het effect van 'economies of scale' op de investeringstijdstippen en -grootte worden geanalyseerd.

1) De term vervangingsinvesteringen kan verwarrend werken. Bedoeld wordt het weer op peil brengen van de aan slijtage onderhevige kapitaalgoederenvoorraad.

1.2. Het model van Manne

Manne beperkt zich in zijn artikel 'Capacity Expansion and Probabilistic Growth' [1] tot situaties waarin de ontwikkeling van de produktiecapaciteit geheel bepaald is door een vaststaande ontwikkeling van de vraag waaraan ten alle tijde voldaan moet worden. In zijn model groeit de vraag lineair. De produktiecapaciteit zal zich, door het bestaan van 'economies of scale', sprongsgewijs aanpassen aan de stijgende vraag. Gegeven de vaststaande vraag waaraan voldoen moet worden is er derhalve voortdurende overcapaciteit. Rekening houdend met de tijdsvoorkeur wordt het optimum gevonden door de investeringskosten te minimaliseren.

Wij zullen het groei-model van Manne herdefiniëren binnen onze probleemstelling. Uitgegaan wordt van een constante vraag waar ook nu expliciet aan voldaan moet worden. De produktiecapaciteit is onderhevig aan een constant slijtageniveau per tijdseenheid.
Het verloop van de produktiecapaciteit uitgaande van een oneindige tijdshorizon is weergegeven in figuur 2.



waarin: t^*, $2t^*$, etc. = de investeringstijdstippen.

Figuur 2. Het verloop van de produktiecapaciteit

Bepaald dient te worden het niveau van de investering X, waarbij de totale investeringskosten minimaal zijn. De grootte van de investering X is een afweging tussen enerzijds schaalvoordelen bij een grotere investering ineens, en

anderzijds tijdvoorkeuropbrengsten door, d.m.v. kleinere investeringen, de investeringsuitgaven te verplaatsen naar de toekomst.
De investeringskosten worden bepaald door de volgende functie:

$$S(X) = gX^b, \text{ waarbij } g > 0;\ 0 < b < 1 \tag{1.2}$$

waarin: X = de investering gemeten in kapitaalgoederen.

De totale investeringskosten van het in figuur 2 geschetste probleem zijn:

$$C(X) = gX^b + e^{-rt^*}C(X) \tag{1.3}$$

ofwel

$$C(X) = \frac{1}{1-e^{-rt^*}}\, gX^b \tag{1.4}$$

waarin: t^* = investeringstijdstip.

Aangenomen wordt dat de produktiecapaciteit onder invloed van de slijtage met de factor één per tijdseenheid daalt. In dat geval geldt:

$$t^* = X \tag{1.5}$$

Als optimum van (1.4) wordt gebruikmakend van (1.5) gevonden:

$$b = \frac{rX^*}{e^{rX^*}-1} \tag{1.6}$$

waarbij: X^* = de optimale investeringsgrootte.

Het interpreteren van het optimum aan de hand van vergelijking (1.6) is niet mogelijk omdat geen analytische uitdrukking voor X gevonden kan worden. Wel kan een tussen-resultaat dat ontstaat bij differentiatie van (1.4) naar X en gelijkstelling aan nul worden geïnterpreteerd. Dit tussen-resultaat luidt:

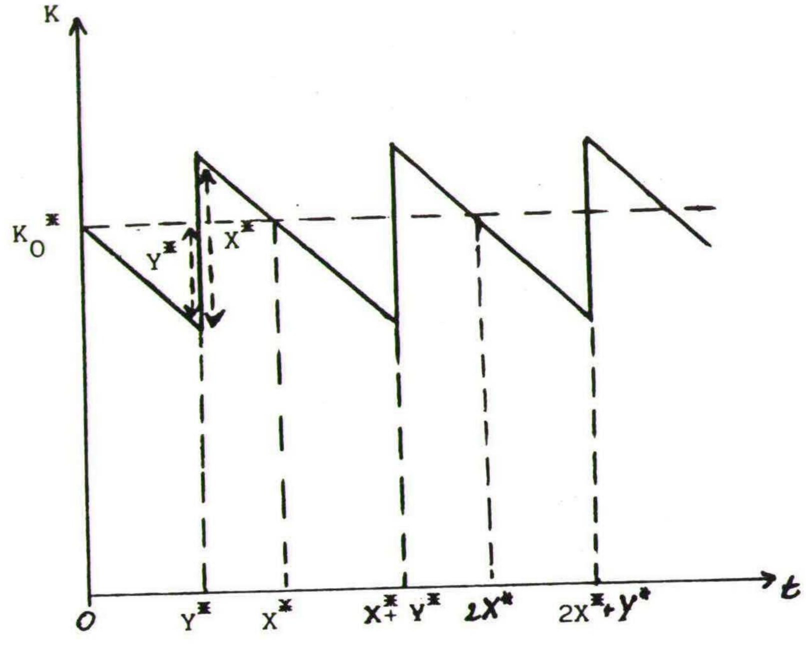
$$bgX^{b-1} = [\frac{dt^*}{dX}\, re^{-rt^*}gX^b]\frac{1}{1-e^{-rt^*}} \tag{1.7}$$

De vergelijking (1.7) laat zien dat in het optimum een gelijkheid geldt tussen de marginale investeringsuitgaven bgX^{b-1} en de tijdsvoorkeurwinst op toekomstige investeringen. Immers het éénmalig vergroten van het investeringsniveau kost bgX^{b-1} en doet de toekomstige investeringen voor een periode dt^*/dX opschuiven wat per cyclus $(dt^*/dX)re^{-rt^*}gX^b$ oplevert.

In het voorgaande is het 'economies of scale' probleem door de verwaarlozing van afnemende meer-opbrengsten op kapitaal min of meer teruggebracht tot een voorraadprobleem. Namelijk: minimaliseer de kosten van de overmatige capaciteit. In de komende paragraaf zullen de afnemende meer-opbrengsten expliciet in het model worden gebracht.

1.3. Een eenvoudig model met afnemende meer-opbrengsten en economies of scale

Onder bepaalde vooronderstellingen kan een investeringsmodel worden geformuleerd dat eenvoudig d.m.v. partiële afgeleiden is op te lossen. De vooronderstellingen zijn een constant slijtage-niveau van de kapitaalgoederenvoorraad per tijdseenheid en het zich bevinden van de kapitaalgoederenvoorraad op het optimale niveau in de uitgangssituatie. Uitgaande van deze vooronderstellingen is de ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad in figuur 3 geschetst. Aangenomen is bovendien dat de slijtage per tijdseenheid één is.



waarin:

K_0^* = het optimaal beginniveau;

X^* = " " investeringsniveau;

Y^* = " " 'tekort'-niveau.

Figuur 3. De ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad binnen het meer volledige model

Zoals eerder reeds is uiteengezet geldt in het optimum K_0^* de gelijkheid tussen het marginaal rendement op de investeringsuitgaven en de tijdvoorkeurvoet. Voor een verdere uitwerking hiervan wordt verwezen naar de voetnoot op de volgende pagina.

Uitgaande van een constant slijtageniveau per tijdseenheid van één en een oneindige tijdshorizon kan de optimale investeringsgrootte X^* worden bepaald door het maximaliseren van de volgende netto-ontvangsten vergelijking:

$$\text{Max } M(X,Y) = \int_0^Y e^{-rt} O(K_0^* - t)dt + \int_Y^X e^{-rt} O(K_0^* + X - t)dt + -e^{-rY} S(X) + e^{-rX} M(X,Y) \quad (1.8)$$

waarin:

O(K) = de opbrengstenfunctie;

S(X) = de investeringskostenfunctie;

M(X,Y) = de totale netto-ontvangsten.

ofwel

$$\text{Max } M(X,Y) = \frac{1}{1-e^{-rX}}\left[\int_0^Y e^{-rt}O(K_0^*-t)dt + \int_Y^X e^{-rt}O(K_0^*+X-t)dt - e^{-rY}S(X)\right] \tag{1.9}$$

De noodzakelijke voorwaarden voor het optimum kunnen gevonden worden door het bepalen van de partiële afgeleiden en deze gelijkstellen aan nul. Bovendien moet rekening worden gehouden met de conditie die geldt voor K_0^*.[1)]
De partiële afgeleiden naar X resp. Y zijn:

$$-re^{-rX}M(X,Y) - e^{-rY}\frac{dS(X)}{dX} + e^{-rX}O(K_0^*) + \int_Y^X e^{-rt}\frac{\partial O(K_0^*+X-t)}{\partial X}dt = 0 \tag{1.10}$$

en

$$O(K_0^*+X-Y) - O(K_0^*-Y) = r\partial(X) \tag{1.11}$$

1) Het optimale niveau K_0^* wordt gevonden door op het investeringstijdstip $t = Y^*$ (zie figuur 1) te eisen dat een investering ter grootte van Y^*, d.w.z. een exacte aanvulling tot het optimale niveau K_0^*, een marginaal rendement heeft dat gelijk is aan de tijdvoorkeurvoet.
Dit houdt in dat op het tijdstip $t = Y^*$ moet gelden:

$$\left.\frac{dO}{dS(X)}\right|_{X=Y^*} = r \tag{a}$$

ofwel

$$\left.\frac{dO}{dK}\cdot\frac{dX}{dS}\right|_{X=Y^*} = r \text{ , (immers } \frac{dO}{dK} = \frac{dO}{dX}) \tag{b}$$

Gegeven een specificatie voor de functie S(X) volgt het optimale niveau K_0^* uit:

$$\frac{dO}{dK} = r.\left.\frac{dS}{dX}\right|_{X=Y^*} \tag{c}$$

De interpretatie (1.10) is ingewikkeld. Deze conditie laat namelijk een afweging zien tussen de voordelen verbonden aan een hoger investeringsniveau (nl. lagere investeringskosten per eenheid) en de nadelen (i.h.b. tijdvoorkeursverliezen gecombineerd met afnemende marginale rendementen). De partiële afgeleide naar Y volgens (1.11) is echter zeer goed voor interpretatie vatbaar. Uit (1.11) volgt namelijk dat op het investeringstijdstip Y^* geldt dat in het optimum de per tijdseenheid te missen opbrengsten bij uitstel van de investering, d.i. $O(K_0^*+X-Y) - O(K_0^*-Y)$, gelijk zijn aan de tijdvoorkeurswinst op de investeringsuitgaven die geboekt wordt door dit uitstel.
Dit resultaat, dat misschien wel voor-de-handliggend is, moet per definitie gelden op elk sprongtijdstip.

Voorgaand model is door het hanteren van stringente vooronderstellingen, zoals het veronderstellen van een constant slijtageniveau per tijdseenheid en een optimaal beginniveau van de kapitaalgoederenvoorraad, eenvoudig d.m.v. (partiële) afgeleiden op te lossen. Het biedt grote voordelen indien het model gegoten kan worden in een optimal-control-formulering. Binnen een dergelijke formulering wordt de kapitaalgoederenvoorraad opgevat als een toestandsvariabele die d.m.v. een (stuur)variabele, de investeringen, 'gestuurd' wordt. Uitgaande van de doelfunctie maximalisatie van alle toekomstige netto-ontvangsten zal het optimale ontwikkelingspatroon van de kapitaalgoederenvoorraad als oplossing uit het model volgen. Binnen een optimal-control-formulering van het model kunnen bovendien allerlei neven-voorwaarden aan de doelfunctie worden opgelegd waardoor het bijvoorbeeld mogelijk is rekening te houden met de wijze waarop de investeringen worden gefinancierd. Van deze laatstgenoemde mogelijke uitbreiding zal in deze bijdrage worden geabstraheerd. Wij zullen ons concentreren op de vertaling van het model in een optimal-control formulering en op de mogelijkheden voor het oplossen van het model binnen een dergelijke formulering. Dit laatste is niet eenvoudig vanwege de continuïteit van de toestandsvariabele die binnen een dergelijke formulering wordt vereist. Ons investeringsmodel voldoet niet aan deze continuïteitseis, immers de kapitaalgoederenvoorraad, zijnde de toestandsvariabele, ontwikkelt zich sprongsgewijs.
In het vervolg van dit artikel zal met name uitgebreid worden ingegaan op de mogelijkheden ter oplossing van dit probleem.

2. Het discontinue investeringsprobleem binnen een optimal-control-formulering

2.1. Inleiding

Door verschillende schrijvers is betoogd dat vele managementsituaties, zoals bijvoorbeeld ons investeringsprobleem, processen zijn in de continue tijd waaraan op bepaalde discrete tijdstippen impulsen worden gegeven. In het verleden zijn dergelijke problemen discreet, d.m.v. een hele reeks variabelen betrekking hebbend op alle te onderscheiden beslissingstijdstippen opgelost. Een dergelijke oplossing is echter niet meer dan een benadering van het in de werkelijkheid in de continue-tijd lopend proces. In de literatuur wordt sporadisch ingegaan op problemen die betrekking hebben op discontinuïteiten in toestandsvariabelen. In deze paragraaf zullen wij ingaan op een aantal benaderingen die in de literatuur zijn weergegeven.

Bensoussan en Tapiero hebben impulsive control-modellen geformuleerd voor allerlei managementsituaties [2]. Voor deze modellen, overigens veelal stochastisch van aard, zijn nog geen analytische oplossingen gevonden. Wel verwijzen zij naar de mogelijkheid van het gebruiken van numerieke technieken. Getz en Martin concentreren zich in hun JOTA-artikel van juni 1980 op het deterministische jumpprobleem dat zich onder andere voordoet binnen 'fish population' modellen [3]. De toestandsvariabelen binnen dergelijke modellen zijn respectievelijk het aantal éénjarige, tweejarige, etc. vissen. Deze toestandsvariabelen vertonen elk jaar een sprong: immers het aantal (bijvoorbeeld) tweejarige vissen bij het begin van het jaar is het aantal éénjarige vissen van eind vorig jaar. In tegenstelling tot ons investeringsprobleem worden de discontinuïteiten in de toestandsvariabelen niet veroorzaakt door de stuurvariabelen. Wel zijn de toestandsvariabelen, en indirect daarmee de discontinuïteiten, te beïnvloeden met de stuurvariabelen, bijvoorbeeld de omvang van de visvangst en het niveau van de kweekinspanning. In hun artikel geven zij ook meer algemene condities voor het bepalen van de oplossing van jump-control-modellen. Deze aanpak biedt weliswaar enig perspectief, echter door het veronderstellen van het actueel zijn van verschillende stelsels bewegingsvergelijkingen tussen de opeenvolgende sprongen is deze aanpak voor ons minder geschikt.

Wel interessant zouden voor ons kunnen zijn optimal-control-modellen waarin de voorraadproblematiek centraal staat. De voorraadproblematiek kenmerkt zich

immers door het bestaan van 'ecnomies of scale' met betrekking tot de kosten per bestelniveau. Het blijkt dat in artikelen over deze problematiek, òf het 'economies of scale' effect wordt weggedefinieerd door het veronderstellen van continue onttrekkingen en toevoegingen aan de voorraad, òf de problematiek wèl binnen een optimal-control model wordt gedefinieerd maar voor de oplossing gebruik wordt gemaakt van andere optimalisatie-methoden [4], [5].
Blaquière heeft in een recent artikel wèl expliciet rekening gehouden met discontinue toestandsvariabelen binnen optimal-control modellen [6]. Hij heeft voor een dergelijk probleem noodzakelijke optimaliteitsvoorwaarden afgeleid. Zijn oplossingsmethode is echter onderhevig aan een aantal vooronderstellingen. Zo wordt bijvoorbeeld verondersteld dat het aantal sprongen in de toestandsvariabele bekend is. Voor ons investeringsprobleem is een dergelijke vooronderstelling niet acceptabel.

Bovenstaande benaderingen bieden geen van alle een oplossing voor ons investeringsprobleem. Voor de oplossing van het probleem kan wel enig aanknopingspunt gevonden worden bij het werk van Vind en de Noorse wiskundige Seierstad en Sydsaeter.
De oplossing van Vind is gebaseerd op een truc. Vind veronderstelt dat de snelheid van de tijd kan worden beïnvloed [7]. Door de tijd stil te zetten en tegelijkertijd de variabelen te laten veranderen verkrijgt men sprongen in de toestandsvariabelen. Om dit model-technisch te bereiken dient het model geformuleerd te worden in een of andere 'artificiële' tijd. Alle toestandsvariabelen zijn continu in deze tijd. De artificiële tijd loopt altijd maar de gewone (= echte) tijd staat op het investeringstijdstip uiteraard stil. De investeringen vinden nu vloeiend plaats in de gekunstelde tijd en daarmee wordt onze toestandsvariabele, de kapitaalgoederenvoorraad, continu in de artificiële tijd. Voor een verdere uitwerking van het idee van Vind kan verwezen worden naar [10] en [11]. In deze paragraaf zal het idee van Vind worden toegepast op ons investeringsprobleem.

De Noren Seierstad en Sydsaeter hebben in hun nog te verschijnen boek optimaliteitscondities geformuleerd welke specifiek op de sprongtijdstippen gelden [8]. Het grote voordeel van deze aanpak is dat het probleem direct aangepakt wordt. Immers ons investeringsprobleem is een gemengd continu-discreet probleem en het is dus voor de hand liggend om optimumcondities te formuleren voor het continue en discrete gedeelte van het model. Uitgebreid zal hier nog op worden ingegaan.

2.2. De optimal-control-formulering van het model

Het in paragraaf 1 gedefinieerde investeringsprobleem kan worden weergegeven binnen een optimal-control formulering. Uitgaande van de doelstelling maximalisatie van alle toekomstige netto-ontvangsten geldt de volgende doelstellingsfunctie:

$$\text{Max.} \int_0^\infty e^{-rt} O(K)dt - \sum_j e^{-rt_j} S(X_j) \tag{2.1}$$

waarin:

t_j = het investeringstijdstip;

$O(K), S(X_j)$ = respectievelijk de opbrengsten- en investeringskostenfunctie die voldoen aan (1.1);

r = tijdsvoorkeurvoet.

De ontwikkeling voor de kapitaalgoederenvoorraad, zijnde de toestandsvariabele, wordt bepaald door de afschrijvingen en de investeringen:

$$\dot{K} := \frac{dK}{dt} = -aK + \sum_i \delta(t-t_j)X_j \tag{2.2}$$

waarin:

a = constant afschrijvingspercentage;

$\delta(t-t_j)$ = dirac-delta-functie.

Het bovenstaande model bevat een discontinue toestandsvariabele en kan derhalve niet met het maximum principe van Pontryagin worden opgelost.

2.3. De oplossing van het model volgens het idee van Vind

Het bovenstaande model heeft, zoals al eerder geconstateerd, een discontinue toestandsvariabele en is derhalve met de traditionele optimal-control technieken niet op te lossen.

Bij toepassing van het in de inleiding uiteengezette idee van Vind dient het model te worden omgezet in de artificiële tijd. Noodzakelijk bij de omzetting is het definiëren van een tweetal nieuwe stuurvariabelen:

$U(W) = 1$ buiten de investeringstijdstippen

$U(W) = 0$ op de investeringstijdstippen

$I(W) =$ de investeringssnelheid (in de artificiële tijd)

waarin: $W =$ de artificiële tijdsvariabele.

Aangenomen wordt dat de investeringssnelheid constant is, dus $I(W) = \bar{I}$. Deze veronderstelling is niet beperkend want de lengte van het investeringspad bepaalt nu de hoogte van de investering. Door de herdefiniëring van het model is de gewone tijd een toestandsvariabele geworden. Immers op het investeringspad staat de gewone tijd stil, terwijl deze buiten de investeringspaden synchroon loopt met de artificiële tijd. De gewone tijd t voldoet daarmee aan de volgende bewegingsrelatie:

$$\dot{t} := \frac{dt}{dW} = U(W) \tag{2.3}$$

Definieer W^* en W^{**} als respectievelijk het begin- en eindpunt van een investeringspad. De totale investering op het daarbij behorende tijdstip t^* is derhalve:

$$X_{t^*} = \int_{W=W^*}^{W^{**}} \bar{I}dW = (W^{**}-W^*)\bar{I} \tag{2.4}$$

De investeringskosten voor deze investering bedragen:

$$S(X_{t^*}) = f(W^{**}-W^*) \tag{2.5}$$

waarin: $f(W^{**}-W^*) =$ investeringskostenfunctie welke concaaf is in $(W^{**}-W^*)$.

Gegeven de bovenstaande herdefiniëring is het oorspronkelijke model volgens (2.1) en (2.2) als volgt in de artificiële tijd te definiëren:

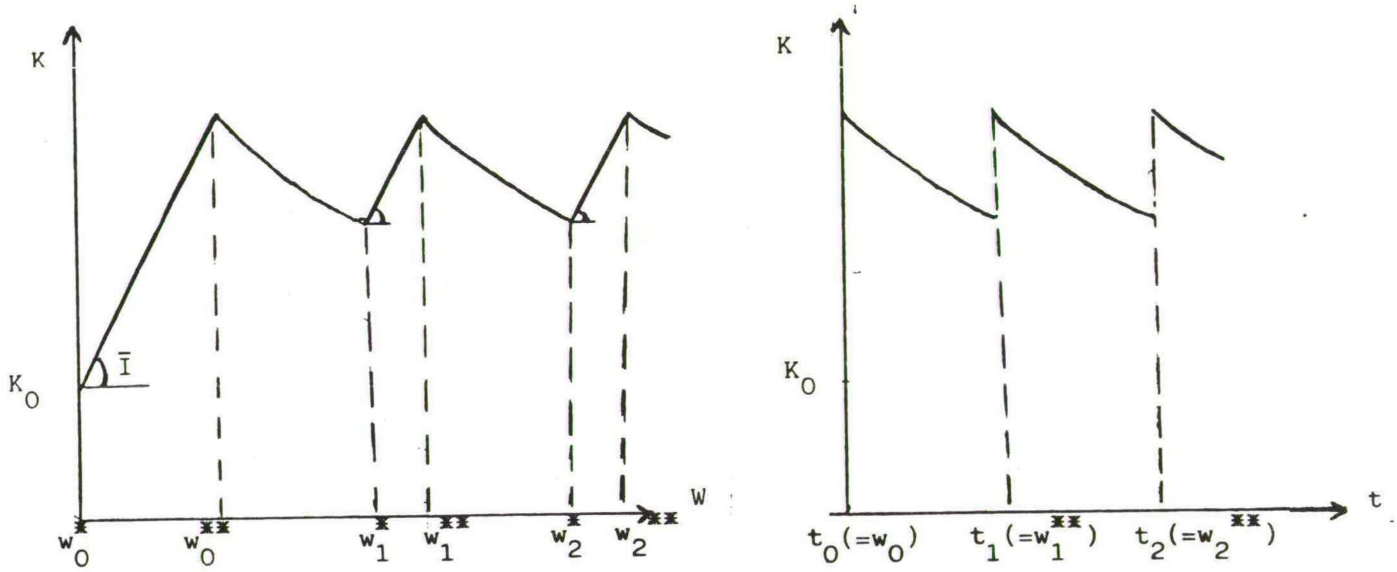
$$\underset{U}{\text{Max}} \int_{W=0}^{\infty} e^{-rt}[UO(K)-(1-U)f(W^{**}-W^*)]dW \tag{2.6}$$

$$\text{o.v. } \dot{K} := \frac{dK}{dW} = (1-U)\bar{I} - UaK \qquad (2.7)$$

$$\dot{t} := \frac{dt}{dW} = U \qquad (2.3)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Op het bovenstaande geherdefinieerde model zijn alle standaard optimal-control technieken van toepassing. Op basis van de door Van Loon ontworpen iteratieve methode is het mogelijk een optimaal bewegingspatroon voor de kapitaalgoederenvoorraad af te leiden, dat bestaat uit een aaneenschakeling van investerings- en niet-investeringspaden [9].
Mede op basis van onze bevindingen in paragraaf 1 kan intuïtief het patroon geschetst worden. Het patroon is weergegeven in figuur 4.



Figuur 4. Het optimale verloop van de kapitaalgoederenvoorraad

In figuur 4 is uitgegaan van een onderneming met een beginniveau van de kapitaalgoederenvoorraad de grootte van K_0. In figuur 4a staat het ontwikkelingspatroon weergegeven in de artificiële tijd terwijl in figuur 4b het patroon is terugvertaald naar de gewone tijd. In de figuur is bovendien aangegeven welke tijdstippen in de gewone tijd overeenkomen met de gekunstelde tijdindeling.

In het voorgaande is aangegeven dat een discontinu optimal-control model vertaald kan worden in een continu model waarop alle standaard optimal-control technieken van toepassing zijn. Een dergelijke vertaling is echter een indirecte oplossingsprocedure voor een dergelijk probleem. In het nu volgende zal getracht worden op rechtstreekse wijze een dergelijk model op te lossen.

2.4. De oplossing van het model volgens Seierstad en Sydsaeter (S en S)

2.4.1. De optimumcondities van S en S

S en S hebben optimumcondities geformuleerd voor de spronggrootte en -tijdstippen. De algemene formulering van S en S zal eerst beknopt worden weergegeven.

(1) de sprong voldoet aan de volgende vergelijking:[1)]

$$K(t_j^+) - K(t_j^-) = g(K(t_j^-),\ X_j,\ t_j),\ j = 1,2,\ldots,\text{etc.} \tag{2.9}$$

waarin:

X_j = stuurvariabele;
t_j = sprongtijdstip;
$g(K(t_j^-),\ X_j,\ t_j)$ = de hoogte van sprong j.

(2) de bewegingsvergelijking van de toestandsvariabele tussen de sprongtijdstippen luidt:

$$\dot{K} := \frac{dK}{dt} = F(K,u,t) \tag{2.10}$$

waarin: u = stuurvariabele.

(3) de doelstellingsfunctie is als volgt geformuleerd:

$$\text{Max.} \int_0^\infty F_0(K,u,t)dt - \sum_j h(K(t_j^-),\ X_j,\ t_j) \tag{2.11}$$

1) De suffix "-" duidt op een situatie net vóór een sprong terwijl de suffix "+" duidt op een situatie net nà de sprong.

waarin: $h(K(t_j^-), X_j, t_j)$ = de kosten van sprong j.

De noodzakelijke voorwaarden voor een oplossing van (2.9) tot en met (2.11) kunnen nu als volgt worden samengevat.

De Hamiltoniaan is gedefinieerd als:

$$\mathbf{H} = F_0(K,u,t) + \Psi F(K,u,t) \tag{2.12}$$

waarin:

$\mathbf{H}$ = de hamiltoniaanfunctie;

Ψ = costate-variabele.

Voor alle $u \in U$ moet gelden:

$$\mathbf{H}(K^*(t),\ u,\ \Psi,\ t) \leq \mathbf{H}(K^*(t),\ u^*(t),\ \Psi,\ t) \tag{2.13}$$

Voor alle intervallen waar K en u continu zijn geldt de Euler-Lagrangevergelijking:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial \mathbf{H}(K^*,u^*,\Psi,t)}{\partial K} \tag{2.14}$$

De volgende optimaliteitscondities gelden op de sprongpunten:

$$\Psi(t_j^+)-\Psi(t_j^-) = \frac{\partial h(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial K} - \Psi(t_j^{*+})\,\frac{\partial g(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial K} \tag{2.15}$$

en

$$-\frac{\partial h(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial X} + \Psi(t_j^{*+})\,\frac{\partial g(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial X} = 0 \tag{2.16}$$

Buiten de sprongpunten geldt voor alle $X \geq 0$ dat

$$\frac{-\partial h(K^*(t),0,t)}{\partial X} + \Psi(t)\,\frac{\partial g(K^*(t),0,t)}{\partial X} \leq 0 \tag{2.17}$$

Tevens moet gelden op de sprongpunten:

$$\mathbf{H}(K^*(t_j^{*+}),u^*(t_j^{*+}),\Psi(t_j^{*+}),t_j^*) - \mathbf{H}(K^*(t_j^{*-}),u^*(t_j^{*-}),\Psi(t_j^{*-}),t_j^*) +$$

$$+ \frac{\partial h(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial t} - \Psi(t_j^{*+})\frac{\partial g(K^*(t_j^{*-}),X_j,t_j^*)}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \geq 0 \text{ voor } t_j = 0 \\ = 0 \text{ voor } t_j \in (0,\rightarrow) \end{array}$$

(2.18)

Met (2.15) tot en met (2.18) zijn de additionele condities voor het specifieke discontinue control-probleem bepaald.

2.4.2. Toepassing van de optimumcondities van S en S op ons model

Het investeringsprobleem zoals geformuleerd in paragraaf 2.2 in de vergelijkingen (2.1) en (2.2) wordt voor de overzichtelijkheid nogmaals vermeld:

$$\text{Max} \int_0^\infty e^{-rt}[O(K)-I]dt - \sum_j e^{-rt_j}S(X_j) \qquad (2.1)'$$

$$\text{o.v. } \dot{K} = -aK + I + \sum_j \delta(t-t_j)X_j \qquad (2.2)'$$

In de vergelijkingen (2.1)' en (2.2)' is voor de volledigheid de mogelijkheid van continu investeren opengelaten. Verondersteld is dat de continue investeringen I een prijs hebben van één per eenheid investeringen. Voor de sprongsgewijze investeringen X wordt aangenomen dat naast de in paragraaf 1.2 geformuleerde eisen ook geldt:

$$\lim_{X \downarrow 0} \frac{dS(X)}{dX} = 1 = \frac{dS}{dX}\,(X = 0) \qquad (2.19)$$

Deze eis betekent tesamen met de eerdere eisen dat sprongsgewijs investeren altijd 'goedkoper' is dan continu investeren. Uitgaande van deze eisen is het volstrekt voor de hand liggend dat er alleen sprongsgewijs zal worden geïnvesteerd. In paragraaf 2.4.3 zal dit formeel worden aangetoond.

De optimumcondities van S en S worden bij toepassing op ons probleem sterk vereenvoudigd. Immers voor de hoogte de kosten van de sprong gelden respectievelijk de volgende functies:

$$g(K(t_j^-),X_j,t_j) = X_j \tag{2.20}$$

en

$$h(K(t_j^-),X_j,t_j) = e^{-rt_j}S(X_j) \tag{2.21}$$

Substitutie van de gegevens volgens (2.20) en (2.21) en de gegevens die volgen uit (2.1)' en (2.2)' in de condities van S en S geeft voor:

$$(2.12) \quad \rightarrow \mathbf{H} = e^{-rt}O(K) + \Psi(-aK + I) \tag{2.12)'}$$

$$(2.14) \quad \rightarrow \dot{\Psi} = -\frac{dO}{dK}e^{-rt} + a\Psi \tag{2.14)'}$$

$$(2.15) \quad \rightarrow \Psi(t_j^+) - \Psi(t_j^-) = -\Psi(t_j^{*+})\frac{\partial g}{\partial K} = 0 \tag{2.15)'}$$

$$(2.16) \quad \rightarrow -\frac{\partial S}{\partial X}e^{-rt_j} + \Psi(t_j^{*+}) = 0 \tag{2.16)'}$$

$$(2.17) \quad \rightarrow -\frac{\partial S}{\partial X}(X = 0)e^{-rt} + \Psi(t) \leqslant 0 \tag{2.17)'}$$

$$(2.18) \quad \rightarrow \mathbf{H}(t_j^+) - \mathbf{H}(t_j^-) + \frac{\partial(e^{-rt_j}S(X_j))}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \geqslant 0 \text{ voor } t_j = 0 \\ = 0 \text{ voor } t_j \in (0,\rightarrow] \end{array} \tag{2.18)'}$$

Als overige condities gelden nog:

De transversaliteitsconditie: $\lim_{t\rightarrow\infty} \psi(t) = 0$ (2.22)

en een conditie, m.b.t. de investeringen, die volgt uit:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial I} = 0$$

met

$$\mathbf{L} = \mathbf{H} + \lambda_1(I-I_{min}) + \lambda_2(I_{max}-I)$$

waarin:

L = de Lagrangiaanfunctie;

λ_1, λ_2 = dynamische Lagrangemultiplicatoren.

ofwel:

$$-e^{-rt} + \Psi + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{2.23}$$

Met (2.14)' tot en met (2.18)', (2.22) en (2.23) zijn alle optimumcondities bekend.

2.4.3. Enkele relevante berekeningen met de optimumcondities

(1) Op eenvoudige wijze kan aangetoond worden dat van de door ons kunstmatig ingebouwde mogelijkheid van continu investeren nooit gebruik zal worden gemaakt.

<u>Bewijs</u>: Uit (2.17)', rekening houdend met (2.19) en (1.1), volgt:

$$\Psi(t) < e^{-rt} \tag{2.24}$$

M.b.v. (2.24) te samen met continuïteit van $\Psi(t)$ volgens (2.15) en resultaat uit (2.16)'

$$\Psi(t_j^+) = \frac{\partial S}{\partial X} e^{-rt_j} < e^{-rt_j}, \tag{2.25}$$

volgt uit (2.23):

$$\lambda_1 > 0 \text{ ofwel } I = I_{min}. \tag{2.26}$$

(2) Uit (2.18)' te samen met (2.16)' kan gevonden worden dat:[1)]

$$\frac{dO}{dK}(t_j^-) \geq (a+r)\frac{dS}{dX} \tag{2.27}$$

en

1) Zie appendix voor afleidingen.

$$\frac{dO}{dK}(t_j^+) < (a+r)\frac{dS}{dX} \qquad (2.28)$$

De relaties (2.27) en (2.28) versterken ons vermoeden dat de kapitaalgoederenvoorraad zich rond het optimale niveau begeeft. Zoals in paragraaf 1 is uiteengezet geldt in het optimum een gelijkheid tussen het marginaal rendement op kapitaal en de rente- en afschrijvingskosten over de investeringsuitgaven.
Uit de resultaten (2.27) en (2.28) blijkt dat het in paragraaf 1 beschreven optimum in ieder geval valt binnen de optimale ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad. Met (2.27) en (2.28) is echter nog niet bewezen dat de kapitaalgoederenvoorraad zich sprongsgewijs rond het optimale niveau zal bewegen.

(3) Het bewijs voor de sprongsgewijze ontwikkeling van de kapitaalgoederenvoorraad rond het optimum volgt uit de volgende relaties. Uitgaande van de continuïteit van Ψ volgens (2.15)' geldt voor twee willekeurige opeenvolgende investeringstijdstippen, t-b en t, de volgende relatie:

$$\Psi(t-b) - \Psi(t) = -\int_{t-b}^{t} \dot{\Psi}\, dT \qquad (2.29)$$

Met de relatie (2.29) en (2.16) te samen met de definitie die geldt voor de kapitaalgoederenvoorraad,

$$K_0 = e^{-ab}(K_0 + X), \qquad (3.30)$$

kan afgeleid worden dat:[1)]

$$\frac{dO^+}{dK} = (a+r)\frac{dS}{dX} + aK_0e^{ab}\frac{d^2S}{dX^2}(1-e^{-rb}) \qquad (3.31)$$

Op identieke wijze kan worden afgeleid dat:

$$\frac{dO^-}{dK} = (a+r)\frac{dS}{dX} + aK_0e^{ab}\frac{d^2S}{dX^2}(e^{-rb}-1) \qquad (3.32)$$

1) Zie appendix voor afleiding.

Aangezien geldt volgens (1.1) dat $\frac{d^2S}{dX^2} < 0$ volgt uit (3.31) resp. (3.32):

$$\frac{dO^+}{dK} < (a+r)\,\frac{dS}{dX} \tag{3.33}$$

en:

$$\frac{dO^-}{dK} > (a+r)\,\frac{dS}{dX} \tag{3.34}$$

Met (3.33) en (3.34) is het sprongsgewijze investeringsproces rond het optimum bewezen.

Besluit

In dit artikel is een aanzet gegeven tot de verwerking van een discreet investeringsproces in een continu optimal-control model. Aan de hand van een artikel van Manne is ingegaan op de meest plausibele oorzaak van het discrete investeringsproces, namelijk het bestaan van 'economies of scale'.
Verder is het model van Manne uitgebreid met een aan afnemende meer-opbrengsten onderhevige produktiefunctie. Op basis van dit model zijn optimum condities afgeleid.

In het tweede gedeelte van dit artikel is uitgebreid ingegaan op de optimal-control-formulering van het model. Het grote probleem binnen deze formulering is de discontinuïteit van onze toestandsvariabele, de kapitaalgoederenvoorraad.
Dit probleem is langs twee wegen aangepakt. Enerzijds is gebruik gemaakt van een idee van Vind, die d.m.v. een herformulering van het model, het probleem weggedefinieerd heeft, anderzijds is een directere oplossingsmethode, zoals voorgesteld door Seierstad en Sydsaeter, nader uitgewerkt. Met deze methode zijn enige interessante resultaten afgeleid.

Het belang van de in dit artikel naar voren gebrachte problematiek mag niet worden onderschat. Dit gezien het feit dat vele managementsituaties betrekking hebben op het op discrete tijdstippen beïnvloeden van een in de continue tijd lopend proces. In dit artikel is getracht hiervoor oplossingen aan te dragen.

Literatuur:

[1] A.S. Manne, "Capacity expansion and probabilistic growth", Econometrica, 29 (1961), pp. 632-649.

[2] A. Bensoussan en C. Tapiero, "Impulsive control in management: prospects and applications", JOTA, 37 (1982), pp. 491-505.

[3] W. Getz en D. Martin, "Optimal control systems with state variable jump discontinuities", JOTA, 31 (1980), pp. 195-205.

[4] R. Hartl en S. Sethi, "Optimal production and inventory planning: an application of the maximum principle for problems with non-differentiable functions", paper Seminar: "The Dynamics of the firm", Brussel 1983.

[5] A. Bensoussan en J. Proth, "Inventory planning in a deterministic environment: concave set up in discrete and continuous time", in Feichtinger, G (ed): "Optimal Control Theory and Economic Analysis", North Holland, Amsterdam (1982), pp. 1-19.

[6] A. Blaquière, "Necessary and sufficiency conditions for optimal strategies in impulsive control", in: Differential games and control theory III, 1978.

[7] K. Vind, "Control systems with jumps in the state variable", Econometrica, 35 (1967), pp. 273-277.

[8] A. Seierstad en K. Sydsaeter, "Jumps in the state variables", overdruk uit te verschijnen boek, ontvangen 22 mei 1984.

[9] P. van Loon, "A dynamic theory of the firm: production, finance and investment", 1983 (Springer, Berlijn).

[10] K.J. Arrow en M. Kurz, "Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy, 1970 (John Hopkins Press, Baltimore).

[11] M. Kamien en N. Schwartz, "Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in Economics and Management", New York, 1981.

Appendix

(1) Afleiding van de relaties (2.27) en (2.28).

Methode 1: (2.12)' gesubstitueerd in (2.18)' geeft voor alle $t \in (0,\rightarrow)$:

$$e^{-rt_j}[O(t_j^+) - O(t_j^-) - rS(X_j)] - \Psi aX_j = 0 \tag{1}$$

(2.16)' in (1) geeft rekeninghoudend met (2.15)':

$$O(t_j^+) - O(t_j^-) - rS(X_j) - \frac{\delta S}{\delta X} aX_j = 0 \tag{2}$$

Substitutie van $O(t_j^+) - O(t_j^-) > \frac{dO}{dK}(t_j^+)X_j$ en $S(X_j) < \frac{dS}{dX} X_j$ in (2) geeft:

$$\frac{dO}{dK}(t_j^+) < (a+r)\frac{dS}{dX} \tag{2.28}$$

De relatie (2.27) kan gevonden worden door uit te gaan van de definitie volgens (2.29) namelijk:

$$\Psi(s) = \Psi(b) - \int_s^b \dot{\Psi}\, dT \tag{2.29'}$$

met s en b als twee opeenvolgende sprongtijdstippen.
Substitutie van (2.14)' en (2.16)' in (2.29)' geeft:

$$\frac{dS}{dX} e^{-rs} = \frac{dS}{dX} e^{-rb} + \int_s^b \frac{dO}{dK} e^{-rT}\, dT - \int_s^b \Psi a dT \tag{3}$$

Na substitutie van:

$$\int_s^b \frac{dO}{dK} e^{-rT} dT < \frac{dO^-}{dK}(b) \int_s^b e^{-rT} dT = \frac{1}{r}\frac{dO^-}{dK}(b)\{e^{-rs} - e^{-rb}\} \tag{4}$$

en (zie voor afleiding methode 2)

$$a \int_s^b \Psi\, dT > a \int_s^b \frac{dS}{dX} e^{-rT} dT = \frac{a}{r}\frac{dS}{dX}\{e^{-rs} - e^{-rb}\} \tag{5}$$

in (3) resteert:

$$\frac{dS}{dX}(e^{-rs}-e^{-rb}) < \frac{1}{r}\frac{dO^-}{dK}(e^{-rs}-e^{-rb}) - \frac{a}{r}\frac{dS}{dX}(e^{-rs}-e^{-rb}) \tag{6}$$

ofwel

$$\frac{dS}{dX}(r+a) < \frac{dO^-}{dK} \tag{2.27}$$

Hiermee is (2.27) aangetoond.

<u>Methode 2</u>: Voor de afleiding van (2.27) en (2.28) kan ook een andere weg gekozen worden. Gezien de continuïteit van Ψ volgens (2.15)' geldt (2.16)' ook in de directe nabijheid van sprongpunten. Dus voor elke $t \in (t_j-\delta,\ t_j+\delta)$, en δ zeer klein, geldt:

$$\Psi(t) = \frac{dS}{dX}e^{-rt} \tag{7}$$

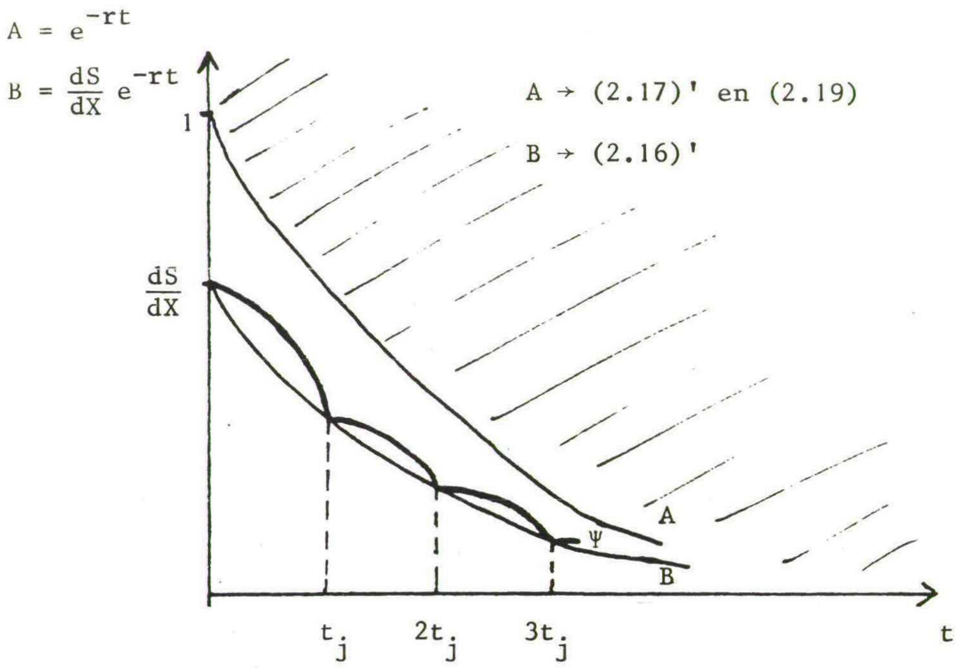
(7) gesubstitueerd in (2.14)' geeft:

$$\dot{\Psi} = (a\frac{dS}{dX} - \frac{dO}{dK})e^{-rt} \quad \text{voor } t \quad (t_j-\delta,\ t_j+\delta) \tag{8}$$

Aangezien (8) geldt voor de omgeving van ieder sprongtijdstip en $\frac{dO^-}{dK} \gg \frac{dO^+}{dK}$ volgt uit (8) dat Ψ sneller daalt net vóór het sprongtijdstip dan net nà het sprongtijdstip. Ofwel,

$$\dot{\Psi}(t_j^-) < \dot{\Psi}(t_j^+) \tag{9}$$

De relatie (9) gecombineerd met (2.16)', (2.17)' en (2.19) geeft het verloop van Ψ zoals weergegeven in figuur 5.



Figuur 5. Het verloop van de Ψ-functie

Net na de sprong moet volgens (7), (8) en figuur 5 gelden:

$$\dot{\Psi} = (a \frac{dS}{dX} - \frac{dO^+}{dK}) e^{-rt} > \frac{d(\frac{dS}{dX} e^{-rt})}{dt} \tag{10}$$

ofwel

$$(a+r) \frac{dS}{dX} > \frac{dO^+}{dK} \tag{2.28}$$

Op identieke wijze moet net voor een sprong gelden:

$$\dot{\Psi} = (a \frac{dS}{dX} - \frac{dO^-}{dK}) e^{-rt} < \frac{d(\frac{dS}{dX} e^{-rt})}{dt} \tag{11}$$

ofwel:

$$(a+r) \frac{dS}{dX} < \frac{dO^-}{dK} \tag{2.27}$$

Hiermee zijn (2.27) en (2.28) wederom afgeleid.

(2) Afleiding van de relaties (3.31) en (3.32).

Om te beginnen leiden we een tussen-resultaat af dat in latere instantie vereist is.

Uit (3.30) volgt:

$$X = K_0[e^{ab} - 1] \tag{12}$$

Bovendien geldt de volgende identiteit:

$$\frac{dS}{dX}(X) = \frac{dS}{dX}(0) + \int_0^X \frac{d^2S}{dX^2}\, dW \tag{13}$$

Substitutie van (12) en (2.19) in (13) geeft:

$$\frac{dS}{dX}(X) = 1 + \int_0^{K_0(e^{ab}-1)} \frac{d^2S}{dX^2}\, dW \tag{14}$$

Differentiatie van (14) naar b geeft:

$$\frac{d(dS/dX)}{db}(X) = a\, K_0\, e^{ab} \frac{d^2S}{dX^2}(X) \tag{15}$$

Resultaat (15) is in latere instantie nodig.

Substitutie van (2.16)' in (2.29) geeft:

$$\frac{dS}{dX}(e^{-r(t-b)} - e^{-rt}) = \int_{t-b}^{t} \frac{dO}{dK}\, e^{-rT} dT - \int_{t-b}^{t} a\Psi(T)\, dT \tag{16}$$

Differentiatie van (16) naar b geeft:

$$\frac{dS}{dX}\, r\, e^{-r(t-b)} + \frac{d(dS/dX)}{db}(e^{-r(t-b)} - e^{-rt}) = \frac{dO^+}{dK}\, e^{-r(t-b)} - a\Psi(t-b) \tag{17}$$

Na substitutie van (2.16)' in (17) en deling door $e^{-r(t-b)}$ resteert:

$$\frac{dO^+}{dK} = (a+r)\,\frac{dS}{dX} + \frac{d(dS/dX)}{db}\,(1-e^{-rb}) \tag{18}$$

Substitutie van (15) in (18) levert de gezochte relatie (3.31):

$$\frac{dO^+}{dK} = (a+r)\,\frac{dS}{dX} + a\;K_0\;e^{ab}\,\frac{d^2S}{dX^2}\,(1-e^{-rb}) \tag{3.31}$$

De relatie (3.32) is op identieke wijze af te leiden indien uitgegaan wordt van de volgende herschreven vorm van (2.29):

$$\Psi(t) = \Psi(t+b) - \int_t^{t+b} \dot{\Psi}\,dT \tag{2.29)'$$

De verdere afleiding wordt aan de lezer overgelaten.

IN 1983 REEDS VERSCHENEN

01. F. Boekema L. Verhoef	Enterprise Zones. Vormen Dereguleringszones een adequaat instrument van regionaal sociaal-economisch beleid?	jan.
02. R. H. Veenstra J. Kriens	Statistical Sampling in Internal Control Systems by Using the A.O.Q.L.-System.	jan.
03. J. Kriens J.Th. van Lieshout J. Roemen P. Verheyen	Management Accounting and Operational Research.	jan.
04. P. Meys	Het autoritair etatisme.	jan.
05. H.J. Klok	De klassieke politieke economie geherwaardeerd.	febr.
06. J. Glombowski M. Krüger	Unemployment benefits and Goodwin's growth cycle model.	febr.
07. G.J.C.Th. van Schijndel	Inkomstenbelasting in een dynamisch model van de onderneming.	febr.
08. F. Boekema L. Verhoef	Local initiatives: local enterprise agency/trust, business in the community.	febr.
09. M. Merbis	On the compensator, Part II, Corrections and Extensions.	febr.
10. J.W. Velthuijsen P.H.M. Ruys	Profit-non-profit: een wiskundig economisch model.	febr.
11. A. Kapteyn H. van de Stadt S. van de Geer	The Relativity of Utility: Evidence from Panel Data.	maart
12. W.J. Oomens	Economische interpretaties van de statistische resultaten van Lydia E. Pinkham.	maart
13. A. Kapteyn J.B. Nugent	The impact of weather on the income and consumption of farm households in India: A new test of the permanent income hypothesis?	april
14. F. Boekema J. van der Straaten	Wordt het milieu nu echt ontregeld?	april

IN 1983 REEDS VERSCHENEN (vervolg)

15.	H. Gremmen Th. van Bergen	De universitaire economen over het regeringsbeleid.	april
16.	M.D. Merbis	On the compensator, Part III, Stochastic Nash and Team Problems.	april
17.	H.J. Klok	Overheidstekort, rentestand en groeivoet; terug naar een klassieke norm voor de overheidsfinanciën?	mei
18.	D. Colasanto A. Kapteyn J. van der Gaag	Two Subjective Definitions of Poverty: Results from the Wisconsin Basis Needs Study.	mei
19.	R.C.D. Berndsen H.P. Coenders	Is investeren onder slechte omstandigheden en ondanks slechte vooruitzichten zinvol?	mei
20.	B.B. v.d. Genugten J.L.M.J. Klijnen	Een Markovmodel ter beschrijving van de ontwikkeling van de rundveestapel in Nederland.	juni
21.	M.F.C.M. Wijn	Enige fiscale-, juridische- en bedrijfseconomische aspecten van goodwill.	juni
22.	P.J.J. Donners R.M.J. Heuts	Een overzicht van tijdsvariërende parametermodelspecificaties in regressieanalyse.	juni
23.	J. Kriens R.H. Veenstra	Steekproefcontrole op ernstige en niet-ernstige fouten.	juli
24.	M.F.C.M. Wijn	Mislukken van ondernemingen.	juli
25.	A.L. Hempenius	Relatieve Inkomenspositie, Individuele en Sociale Inkomensbevrediging en Inkomensongelijkheid.	aug.
26.	B.R. Meijboom	Decomposition-based planning procedures.	sept.
27.	P. Kooreman A. Kapteyn	The Systems Approach to Household Labor Supply in The Netherlands	sept.
28.	B.B. v.d. Genugten K. v.d. Sloot M. Koren B. de Graad	Computergebruik bij propedeuse-colleges econometrie	sept.
29.	W. de Lange	Korter werken of Houden wat je hebt Tendenzen, feiten, meningen	okt.

IN 1983 REEDS VERSCHENEN (vervolg)

30.	A. Kapteyn S. van de Geer H. van de Stadt	The impact of changes in income and family composition on subjective measures of well-being	okt.
31.	J. van Mier	Gewone differentievergelijkingen met niet-constante coëfficiënten en partiële differentievergelijkingen	nov.
32.	A.B. Dorsman J. van der Hilst	Een nieuwe marktindex voor de Amsterdamse effectenbeurs De Tam	nov.
33.	W. van Hulst	Het vervangingsprobleem bij duurzame produktiemiddelen en de ondernemingsdoelstelling volgens J.L. Meij	dec.
34.	M.D. Merbis	Large-Scale Systems Theory for the Interplay Model	dec.
35.	J.P.C. Kleijnen	Statistische Analyse: Wat is de kans op .....?	dec.

IN 1984 REEDS VERSCHENEN

01. P. Kooreman A. Kapteyn	Estimation of Rationed and Unrationed Household Labor Supply Equations Using Flexible Functional Forms	jan.
02. Frans Boekema Leo Verhoef	Lokale initiatieven; Sleutel voor werkgelegenheidsontwikkeling op lokaal en regionaal niveau	febr.
03. J.H.J. Roemen	In- en uitstroom van melkvee in de Nederlandse rundveesektor geschat m.b.v. een "Markov"-model	febr.
04. M.D. Merbis	From structural form to state-space representation	febr.
05. R.H. Veenstra J. Kriens	Steekproefcontrole op ernstige en niet-ernstige fouten (gecorrigeerde versie)	maart
06. Th. Mertens	Kritiek op Habermas' communicatietheorie: een evaluatie van het Gadamer-Habermas-debat en van Habermas' interpretatie van de taalhandelingstheorie. Een onderzoeksverslag	maart
07. P. Bekker A. Kapteyn T. Wansbeek	Measurement error and endogeneity in regression: bounds for ML and IV-estimates	maart
08. B.R. Meijboom	An input-output like corporate model including multiple technologies and "make-or-buy" decisions	april
09. J.J.A. Moors	On the equivalence between cooperative games and superadditive functions	april
10. J. van Mier	Gewone differentievergelijkingen met niet-constante coëfficiënten en partiële differentievergelijkingen (vervolg R.T.D. 83.31)	april
11. W.J. Oomens	Het optimale prijs- en reclamebeleid van een monopolist	april
12. P.A. Verheyen	Een dynamische ondernemingstheorie en de reacties op de overheidspolitiek	mei
13. G.J.C.Th. van Schijndel	Vermogensverschafferscliëntèles in statistische en dynamische ondernemingsmodellen	mei

14.	P. Kooreman A. Kapteyn	The effects of economic and demographic variables on the allocation of leisure within the household	mei
15.	L. Bosch	Over flexibele produktie-automatisering	juni
16.	M. Janssens R. Heuts	On distributions of ratios of dependent random variables	juni
17.	J. Plasmans	Specification and estimation of the linkage block of Interplay II (1953-1980)	juni
18.	P. Bekker A. Kapteyn T. Wansbeek	Consistent sets of estimates for regressions with correlated or uncorrelated measurement errors in arbitrary subsets of all variables	juni
19.	A.L. Hempenius	Dividend policy of large Dutch corporations	juni
20.	B.B. van der Genugten K. van der Sloot H.A.J. van Terheijden	Handleiding voor de programma's DATAH en REGAP	juni
21.	A.B. Dorsman J. v.d. Hilst	The influence of the calculation-interval on the distribution of returns at the Amsterdam Stock Exchange	juni
22.	B.R. Meijboom	Joint and Common Cost Allocation in a Multi-Level Organization	juli
23.	Ton J.A. Storcken	Arrow's impossibility theorem on restricted domains	juli
24.	E.E. Berns	De Terugtrekking Over politiek en ethiek bij Derrida	juli
25.	Chr.H. Kraaijmes	De organisatorische condities voor concrete hulpverlening: een model naar aanleiding van de sociale dienst	juli
26.	A.L. Hempenius	The Interpretation of Cross-Sectional Regressions with Variable Constant Terms	aug.
27.	J. Kriens J.Th. van Lieshout	Enkele eigenschappen van de kritieke-lijn-methode van Markowitz	aug.